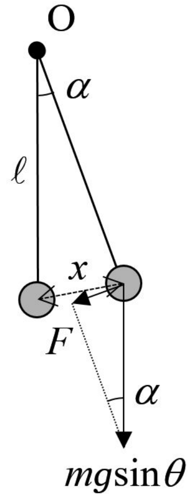
$\boxed{1}$ 解答例

(1) 小球の質量を m とする。小球に働く重力の斜面に平行な成分は $mg\sin\theta$。最下点から糸が角度 α 傾いたときの小球の変位を x とおくと，小球に働く復元力 F は



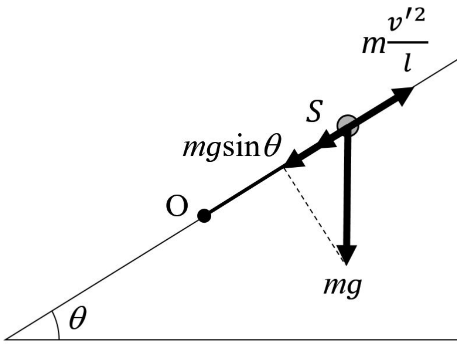
$$F = -mg\sin\theta\sin\alpha \fallingdotseq -\frac{mg\sin\theta}{\ell}x$$

となる。したがって，振動の周期を T とおくと

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg\sin\theta}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sin\theta}}$$

(2) 最下点を基準とした力学的エネルギー保存則より，最下点における小球の速さを v とおくと

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2g\ell\sin\theta + v_0^2}$$



(3) 小球が円運動し続けるためには，最高点で糸がたるまなければ良い。最高点における小球の速さを v' とおくと，点 O の高さを基準とした力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + mg\ell\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \quad v'^2 = v_0^2 - 2g\ell\sin\theta$$

最高点における張力を S とおくと，小球にかかる力のつりあいは，

$$m\frac{v'^2}{\ell} = S + mg\sin\theta$$

v' を消去すると

$$S = \frac{m}{\ell}(v_0^2 - 2g\ell\sin\theta) - mg\sin\theta = \frac{m}{\ell}v_0^2 - 3mg\sin\theta$$

最高点で糸がたるまない条件は $S \geqq 0$。したがって

$$S = \frac{m}{\ell}v_0^2 - 3mg\sin\theta \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \geqq \sqrt{3g\ell\sin\theta}$$

2

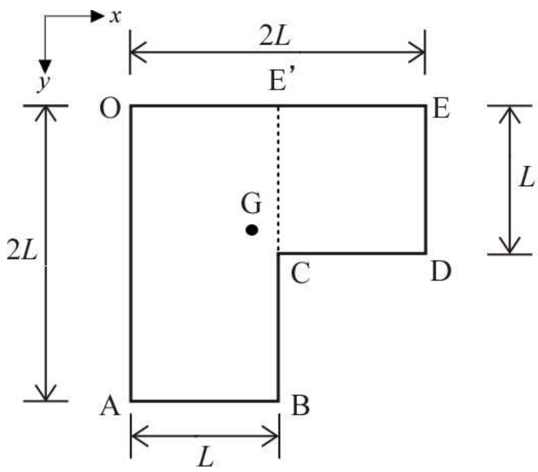
解答例

(1) 辺 BC の延長線と辺 OE の交点を E'とする。板の質量をMとする。

OABE'の質量は$\frac{2M}{3}$, E'CDE の質量は$\frac{M}{3}$。

右図のように点 O を原点（x 軸右向き方向を正，y 軸下向き方向を正）とすると，OABE'の重心は（$\frac{L}{2}$，L)。同じく E'CDE の重心は

($\frac{3L}{2}$，$\frac{L}{2}$)。



板の重心を G（x_G，y_G）とすると，

$$x_G = \frac{\frac{2M}{3}\times\frac{L}{2}+\frac{M}{3}\times\frac{3L}{2}}{\frac{2M}{3}+\frac{M}{3}} = \frac{5L}{6} \quad y_G = \frac{\frac{2M}{3}\times L+\frac{M}{3}\times\frac{L}{2}}{\frac{2M}{3}+\frac{M}{3}} = \frac{5L}{6} \quad \text{より} \quad \mathrm{G}(x_G, y_G) = (\frac{5L}{6}, \frac{5L}{6})$$

距離 OG は，$\sqrt{\left(\frac{5L}{6}\right)^2+\left(\frac{5L}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}L$

(2) 重力加速度の大きさをg，ばねの自然の長さをl_0，板をつるした後のばねの長さをlとする。また，ばね１のばね定数をk_1，ばね２のばね定数をk_2とする。

まず，点 O におけるモーメントのつり合いを考える（反時計回りを正とする)。

$$-Mg\times\frac{5}{6}L+k_2\times(l-l_0)\times 2L = 0$$

$$k_2(l-l_0) = \frac{5Mg}{12} \quad \text{より} \quad k_2 = \frac{5Mg}{12(l-l_0)} \quad \cdots\cdots(1)$$

次に，板とばねの力のつり合いを考える。

$$k_1\times(l-l_0)+k_2\times(l-l_0) = Mg \quad \cdots\cdots(2)$$

式(2)に式(1)を代入すると

$$k_1(l-l_0)+\frac{5Mg(l-l_0)}{12(l-l_0)} = Mg$$

したがって$k_1 = \frac{7Mg}{12(l-l_0)}$

以上より

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{12}\Big/\frac{5}{12} \quad \text{より} \quad \frac{7}{5} \ \text{倍}$$

$\boxed{3}$ 解答例

(1) コンデンサーC_1の電気容量$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}$より，$C_1$に蓄えられた電気量$Q_1 = C_1 V = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V$

(2) コンデンサーC_3に電荷は蓄えられないため，C_3の電気量$Q_3 = 0$である。

コンデンサーC_2の電気容量$C_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d}$より，$C_2$に蓄えられた電気量$Q_2 = C_2 V = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} V$

C_1とC_2は並列接続だから，コンデンサーに蓄えられた電気量Q_{12}は$Q_{12} = Q_1 + Q_2$より，

$$Q_{12} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V + \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} V = \frac{4\varepsilon_0 a^2}{3d} V$$

(3) 誘電体が挿入された部分の電気容量$C_{3d} = \frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}$，真空部分の電気容量$C_{3v} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{2d}$

コンデンサーC_3の電気容量C_3はC_{3d}とC_{3v}の直列接続であるから，$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_{3d}} + \frac{1}{C_{3v}}$

よって，$\frac{1}{C_3} = \frac{d}{2\varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2} = \frac{5d}{2\varepsilon_0 a^2}$より，$C_3 = \frac{2\varepsilon_0 a^2}{5d}$

(4) コンデンサーC_1，C_2，C_3は並列接続のため，極板間の電位差は等しく，V'とする。

S_3を閉じる前と後で蓄えられた電気量の合計は等しいため，$Q_{12} = (C_1 + C_2 + C_3)V'$

問(2)及び問(3)の解答より，$\frac{4\varepsilon_0 a^2}{3d} V = \left(\frac{\varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} + \frac{2\varepsilon_0 a^2}{5d}\right) V'$となり，$V' = \frac{10}{13} V$

よって，S_3を閉じた後のC_1の電気量Q_1'は，$Q_1' = C_1 V' = \frac{10\varepsilon_0 a^2}{13d} V$

(5) C_3に蓄えられた静電エネルギーU_3は$U_3 = \frac{1}{2} C_3 {V'}^2$

C_2に蓄えられたの静電エネルギー$U_2 = \frac{1}{2} C_2 {V'}^2$

よって，U_3とU_2の比は$\frac{U_3}{U_2} = \frac{C_3}{C_2} = \frac{6}{5}$より，$\frac{6}{5}$倍となる。

$\boxed{4}$

【解答例】

A: 定圧　B: 熱力学第 1　C: 定積　D: マイヤーの

ア：$\frac{pSh}{RT}$　イ：$\frac{TH}{h}$　ウ：$\frac{3}{2}pS(H-h)$　エ：$\frac{5}{2}pS(H-h)$　オ：$3T\frac{H}{h}$　カ：$3pSH$

キ：$\frac{5}{2}R$　ク：$\frac{3}{2}R$