[問 1]　(応用数学)

行列 $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 固有方程式を立てて，固有値をすべて求めよ。

(2) すべての固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ。

(3) 一次独立な 3 つの固有ベクトルから，$A$ を対角化する行列 $P$ を求めよ。

(4) 行列 $P$ は逆行列 $P^{-1}$ を持つ。行列 $P^{-1}$ を求めよ。

[問２]　(応用数学)

実数 $s > 0$ に対して関数 $f(s)$ を

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

と定義する。また，次の極限の式が成り立つことを既知とする。

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^s = 0 \qquad (s > 0)$$

(1)　$f(1)$ と $f(2)$ の値を求めよ。

(2)　$f(s)$ が等式 $f(s+1) = sf(s)$ を満たすことを示せ。

(3)　自然数 $n$ に対して，$f(n) = (n-1)!$ を満たすことを示せ。

(4)　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。必要ならば，次の積分の値を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

[問 3]　(応用数学)

$y$ を $x$ の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式　$(6x+y)+(x+6y)\dfrac{dy}{dx}=0 \cdots\cdots$ (A) の一般解を求めたい。ここで $u=\dfrac{y}{x}$ (ただし $x \neq 0$) とおき，次の問 (i)～(iii) に答えよ。

(i) $y=xu$ より，この両辺を $x$ で微分せよ。

(ii) (A) を $x$ と $u$ で表せ。

(iii) (ii) で表された微分方程式の一般解を求め，その結果から (A) の一般解を求めよ。

(2) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$　の一般解を求めよ。

(3) (2) の結果を利用して，微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=3e^x$　の一般解を求めよ。