令和 2 年度工学部入学者選抜学力検査問題・略解（推薦）

教科：数学

$\boxed{1}$ 　a，θ は実数とする。2 次方程式 $2x^2 + ax - 1 = 0$ が $\sin\theta$，$\cos\theta$ を解にもつとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) θ の値を求めよ。

$\boxed{\text{略解例}}$

（1）　解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{a}{2} & \cdots\cdots① \\ \sin\theta\cos\theta = -\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答}) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

である。

（2）　① の両辺を 2 乗すると，

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{4}$$

となる。$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ および ② を上式に代入して計算**（略）**すると，$\boldsymbol{a = 0}$……(**答**) を得る。

（3）　② は $2\sin\theta\cos\theta = -1$，つまり $\sin(2\theta) = -1$ となる。よって，$2\theta = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi$，つまり $\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{4}\pi + n\pi}$ （$\boldsymbol{n}$ **は整数**)……(**答**) を得る。

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 OAB において $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ としたとき，三角形 OAB の面積 S の値を求めよ。

(2) $\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{b}-k\vec{a}$ が垂直になるように k の値を定めよ。

(3) (2) で定めた k の値のとき，$\vec{b}-k\vec{a}$ と平行な単位ベクトル $\vec{u}$ をすべて求めよ。

略解例

(1) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{10}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ より，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。よって，$0^\circ<\angle\mathrm{AOB}<180^\circ$ に注意すると，$\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ である。このとき，

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である。

(2) $\vec{a}+2\vec{b}=(1,\ 2)+2(3,\ 1)=(7,\ 4)$, $\vec{b}-k\vec{a}=(3,\ 1)-k(1,\ 2)=(3-k,\ 1-2k)$ より，

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-k\vec{a}\right)=7(3-k)+4(1-2k)=25-15k$$

である。よって，$25-15k=0$ となる k の値は，$k=\frac{25}{15}=\boldsymbol{\frac{5}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$ である。

(3) $k=\frac{5}{3}$ のとき，

$$\vec{b}-k\vec{a}=\left(3-\frac{5}{3},\ 1-\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{3}(4,\ -7)$$

より，$\left|\vec{b}-k\vec{a}\right|=\frac{\sqrt{65}}{3}$ である。よって，$\vec{u}$ は，

$$\vec{u}=\frac{\pm 1}{\left|\vec{b}-k\vec{a}\right|}\left(\vec{b}-k\vec{a}\right)=\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{65}(4,\ -7)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である。

3　a を定数とする。関数 $f(x)=3x^2-ax^3$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値が -4 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

略解例

(1)　$f'(x)=6x-3ax^2=3x(2-ax)$ より，$a \leqq 0$ のときは，$x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。このとき，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(0)=0$ であり，条件に合わない。よって，$a \leqq 0$ は不適である。

$a>0$ のときには，$f'(x)=0$ となる x は，$x=0,\ \dfrac{2}{a}$ であるので，次の場合がある。

(i)　$0<\dfrac{2}{a}<2$，すなわち $a>1$ のとき，増減表 **(略)** は以下のようになる。このとき，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値が -4 となるのは，$x=2$ のときである。したがって，$f(2)=12-8a=-4$ を解くと，$a=2$ を得る。

(ii)　$\dfrac{2}{a} \geqq 2$，すなわち $0<a \leqq 1$ のときは，$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は，x は，$f(0)=0$ となり，条件に合わない。よって，$0<a \leqq 1$ は不適である。

以上の (i)，(ii) より，関数 $f(x)=3x^2-ax^3$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値が -4 となるのは，$\boldsymbol{a=2}$ **のときのみ**……**(答)** である。

(2)　$a=2$ より，$f(x)=3x^2-2x^3=x^2(3-2x)$……① であるから，$f(x)=0$ となる x は，$x=0,\ \dfrac{3}{2}$ である。また，$f'(x)=6x-6x^2=6x(1-x)$ であるから，$f'(x)=0$ となる x は，$x=0,1$ である。このとき，増減表 **(略)** は次のようになる。

よって，$f(x)$ は

$$x=0 \text{ のとき 極小値 } f(0)=0,$$

$$x=1 \text{ のとき 極大値 } f(1)=1$$

をとる。以上より，$y=f(x)$ のグラフの概形 **(略)** は以下の通りである。

(3)　① より，$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \left(x \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ -f(x) & \left(x > \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$ であるので，

$$\int_0^2 |f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^2 \{-f(x)\}\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^4\right]_0^{\frac{3}{2}}-\left[x^3-\frac{1}{2}x^4\right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{27}{16}}\text{……}\textbf{(答)}$$

となる。