[問 1]　(応用数学)

2 次曲線の方程式 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x - 2y - 7 = 0$ は，以下のように行列の演算で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ここで，行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \\ -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ である。

(1) 行列 A から，小行列 $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ および列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ を作成する。
$Q \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす x_0 および y_0 の値を求めよ。

(2) $x' = x - x_0$，$y' = y - y_0$ の変換によって，2 次曲線の方程式が表す図形の中心は座標の原点に平行移動する。与えられた 2 次曲線の方程式を x' と y' で表せ。

(3) (1) の小行列 Q について，固有値と，それに対応する固有ベクトルをすべて求めよ。ただし固有ベクトルは大きさ 1 に正規化すること。

(4) 行列 P とその逆行列 P^{-1} による $P^{-1}QP$ の演算で，小行列 Q を対角化する。(3) で得られた固有ベクトルから，行列 P を求めよ。

(5) 行列 P の逆行列 P^{-1} による変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ によって，(2) の 2 次曲線の方程式を X，Y を用いて表せ。

[問２]　(応用数学)

不定積分

$$I_n = \int (\tan\theta)^n d\theta \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

について次の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $x = \tan\theta$ とおくと，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{x^2+1}$ であることを示せ。

(3) I_{n+2} と I_n の関係が

$$I_{n+2} = \frac{(\tan\theta)^{n+1}}{n+1} - I_n$$

となることを示せ。必要ならば $I_n = \int (\tan\theta)^{n-2}\tan^2\theta d\theta$ に着目し，$x = \tan\theta$ と置き換えてもよい。

(4) (2) の関係を用いて，I_3 を求めよ。

[問 3]　(応用数学)

y を x の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $y' + x^2 y' = 4xy$ の特殊解を求めよ。ただし，初期条件を $(x, y) = (3, 1000)$ とする。

(2) 微分方程式 $xy' + y = 0$ の一般解を求めよ。

(3) (2) の結果を用いて，微分方程式 $xy' + y = e^x$ の一般解を求めよ。