

[問 1] (応用数学)

以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -6 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とする。 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & -6 & -6 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

とする。 B の行列式 $|B|$ の第 4 行に関する余因子展開をせよ。

(3) (2) の行列 B の固有値を求めよ。

(4) (2) の行列 B について、 $B^2 - E$ の階数 (ランクともいう) を求めよ。ただし、 E は B と同じ次数の単位行列である。

[問 2] (応用数学)

- (1) 機械学習とは、データに基づいて規則性を学習し、予測などを行う技術である。その予測の誤差が最小となる変数の値を求めるために微分が用いられることがある。以下の問いに答えよ。

(a) 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ の極値をすべて求めよ。また、 $x \geq 0$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(b) 関数 $g(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x+y)}$ について、以下の問いに答えよ。

(i) 偏導関数 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ。

(ii) $x > 0$ かつ $y > 0$ の範囲で、 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ を満たす点 (x, y) を求めよ。

(iii) $x > 0$ かつ $y > 0$ における $g(x, y)$ の最大値を、(a) の結果を用いて求めよ。

- (2) 機械学習では、予測の誤差を評価するために積分が用いられることがある。以下の問いに答えよ。

(a) 不定積分

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

を求めよ。必要ならば $u = x^2$ と置換してよい。

(b) 定積分

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_x^1 x^2 e^{y^2} dy \right\} dx$$

について、以下の問いに答えよ。

(i) 定積分 I の積分領域を xy 平面上に図示せよ。また、積分の順序を入れ替えた式を示せ。

(ii) I の値を求めよ。必要ならば (a) の結果を用いてよい。

[問 3] (応用数学)

y は x の実数関数とする。以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' = x(y - 1)$

(2) $y'' + 3y' + 2y = e^{-3x}$

(3) $(1 - \frac{\cos y}{x})dx + \sin y dy = 0$

(4) $y' = \frac{y}{x^2y^2 - x}$