

[問 1] (応用数学)

行列 A と列ベクトル r を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $r^T A r = 9$ を x と y を用いた 2 次式で表せ。ここで、 $r^T = (x \ y)$ は行ベクトルであるものとする。
- (2) A の固有値 λ_1, λ_2 と対応する固有ベクトル v_1, v_2 を求めよ。
- (3) $Q = (v_1 \ v_2)$, $P = \frac{1}{\sqrt{|\det Q|}} Q$, $r' = P^{-1} r$ とする。ただし、 $\det Q$ は Q の行列式、 P^{-1} は P の逆行列を表す。
このとき、 $P^{-1} A P$ および r' を求めよ。
- (4) $r' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする。このとき、 $r^T A r = 9$ を X と Y を用いた 2 次式で表せ。

[問 2] (応用数学)

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ を実関数とすると、次の問いに答えよ。

(1) 定義域が $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である θ を用いて、 $x = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ とおく。

分数関数の微分 $\frac{dx}{d\theta}$ を実行し、その結果を θ を用いて表せ。

(2) (1) の結果および $\theta = \arctan x$ の関係を用いて、不定積分 $\int f(x)dx$ を x の関数として表せ。

(3) $t > 0$ とする。定積分 $\int_{-t}^0 f(x)dx$ を t の関数で表せ。

(4) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ。ただし、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$ を利用してよい。

[問 3] (応用数学)

(1) 微分方程式 $xy' + 3y = 10x^2$ の一般解を求めよ。ただし、 $x \neq 0$ とする。

(2) 微分方程式 $y'' + y = \sin(2x)$ の一般解を求めよ。

(3) 微分方程式 $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$ の一般解を求めよ。