

1

5色の異なる色を用意し、そのうちの何色かを使って、平面上にある正五角形の辺を塗り分ける方法を考える。つまり、1つの辺には1色を塗り、頂点を挟んで隣り合う辺どうしは異なる色となるように塗る。ただし、平面上で正五角形を回転させて一致する塗り分け方どうしは区別しない。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 5色すべてを使った塗り分け方は何通りあるか求めよ。
- (2) 5色のうちの4色を使った塗り分け方は何通りあるか求めよ。
- (3) 5色のうちの何色かを使った塗り分け方は全部で何通りあるか求めよ。

2

ある工場では製品 X, Y を製造している。それらを製造するのに原料 A, B が必要である。X を 1 kg 製造するために必要な原料の量は, A が 20 kg, B が 5 kg であり, Y を 1 kg 製造するために必要な原料の量は, A が 10 kg, B が 15 kg である。また, 原料の在庫量は, A, B ともに 900 kg である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) x, y を 0 以上の実数とする。X, Y がそれぞれ x kg, y kg 製造されたとすると, A, B はそれぞれ何 kg 必要であったか。 x, y の式で表せ。
- (2) X, Y の 1 kg あたりの利益がともに 1 万円するとき, 原料の在庫量の範囲での利益の最大値を求めよ。
- (3) c を正の実数とする。X, Y の 1 kg あたりの利益がそれぞれ c 万円, 1 万円であり; この工場では X, Y を合わせて少なくとも 50 kg 製造しなければならないとき, 原料の在庫量の範囲での利益の最大値および最小値をそれぞれ c の式で表せ。

3

複素数平面上で点 z が点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 上を動くとき、 $w = iz + 2$ で表される点 w が描く図形を C_2 とする。ただし、 i は虚数単位である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C_2 はどのような図形か求めよ。
- (2) C_1 と C_2 の共有点をすべて求めよ。
- (3) C_1 と C_2 の共有点のうち、原点からの距離が最大となる点を α とする。3点 α , z , w が同一直線上にあることを示せ。

4

座標平面上の曲線 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ を C とし、 C 上の点 $P(2, \sqrt{5})$ における接線を l_1 とする。また、 C 上の P における法線を l_2 とし、 l_2 と x 軸の交点を Q とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $F(x) = x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。ただし、 \log は自然対数とする。
- (2) l_1 と y 軸および C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
- (3) 線分 PQ 、 x 軸、 y 軸および C で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。