(応用数学)　[問 1]

1.　4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(0,1,1)$，$\mathrm{B}(1,0,1)$，$\mathrm{C}(2,2,-1)$ に対し，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の張る平行六面体の体積を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の張る平面を S とする。点 C から平面 S に向かって垂線を下ろした際，この垂線と平面 S との交点 P の座標を求めよ。

2.　以下の行列について，次の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ。

(2)　$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ。

(3)　$\boldsymbol{B}^{n}$ を求めよ。ただし，n は任意の整数とする。

(応用数学)　[問 2]

以下の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{G}(1,0,0)$ を始点とし，点 $\mathrm{H}(0,1,\frac{\pi}{2})$ を終点とする線分を曲線 C とする。
このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}=2y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+\sin^2 z\boldsymbol{k}$ を曲線 C に沿って線積分した結果を求めよ。ただし，x，y，z は任意の変数，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 軸方向の単位ベクトルとする。

(2)　原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径 b (>0) の球面を S とする。
このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $(|\boldsymbol{r}|=r\neq 0)$ について以下の等式

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=4\pi$$

が成り立つことを示せ。ただし，x，y，z は任意の変数，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 軸方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{n}$ は原点 O から遠ざかるように選んだ球面 S 上の法単位ベクトルとする。

(3)　原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ に置かれた点電荷 Q が作る静電界の電束密度 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

と書き表すことができる。
このとき，(2)と同様に，原点 O を中心とする半径 b (>0) の球面を S と定義する。原点 O に点電荷 Q が配置されているとき，点電荷 Q が作る静電界の電束密度 $\boldsymbol{D}$ の球面 S に関する法線面積分

$$\iint_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

を求めよ。ただし $\boldsymbol{n}$ は原点 O から遠ざかるように選んだ球面 S 上の法単位ベクトルとする。

(応用数学)　[問 3]

次の 1 階微分方程式について，一般解を求めよ。ただし，y および v を x の関数とし，$y = vx$，$y' = v + v'x$とおいてもよい。

(1)　$y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x}$　　ただし，$x \neq 0$，$y \neq 0$とする。

(2)　$(-7x + 3y) + (3x - y)y' = 0$　　ただし，$x \neq 0$とする。