[問 1]　（応用数学）

数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$が以下の初期条件と漸化式を満たすとする：

$a_0 = 1$、$b_0 = 2$、$c_0 = 1$

$$\begin{cases} a_n &= 3a_{n-1} + 2c_{n-1} \\ b_n &= 2b_{n-1} \\ c_n &= 2a_{n-1} + 3c_{n-1} \end{cases}$$

ベクトル$\boldsymbol{\alpha}_n$を次のように定義する：

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

（1）関係式$\boldsymbol{\alpha}_n = A\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$を満たす行列$A$を求めよ。

（2）行列Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは最初の非ゼロ成分が 1 になるように答えること。

（3）（2）の結果を用いて、任意の自然数nについてベクトル$\boldsymbol{\alpha}_n$を求めよ。

（4）（2）の結果を用いて、$exp(A)$を求めよ。

[問 2]　（応用数学）

(1) $x \geq 0$かつ $y \geq 0$ において、正の整数定数p、実数変数 r、θによって記述される次の式(i)を考える。これは、$p=1$の場合は円弧、$p=2$の場合は直線、$p=3$の場合はアステロイド曲線として知られている(図 1 参照)。

$$\begin{cases} x = r\cos^p\theta \\ y = r\sin^p\theta \end{cases} \quad \left(r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(i)}$$

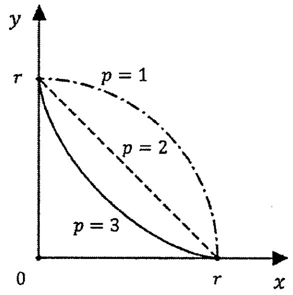

図 1　式(i)によって定義される曲線または直線

(1-1)　式(i)について、$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$ を計算せよ。

(1-2)　$x=0$、$y=0$、式(i)の曲線により囲まれる面積$S(r)$を θによる積分として記述せよ。

$$S(r) = \int_0^r y dx$$

(1-3)　$p=3$の時、$S(r)$を計算せよ。下記公式を用いて良い。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\theta\, d\theta = \frac{2m-1}{2m} \cdots\cdots \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}\theta\, d\theta = \frac{2m}{2m+1} \cdots\cdots \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

(2) 正の整数定数p、正の実数定数 a、実数変数 φにより、式(i)で $r = a\cos^p\varphi$とする。$x \geq 0$かつ $y \geq 0$かつ $z \geq 0$において、p、a、φに加えて、実数変数θによって記述される式(ii)を満たすx、y、zの構成する曲面を考える。

$$\begin{cases} x = a\cos^p\varphi\cos^p\theta \\ y = a\cos^p\varphi\sin^p\theta \\ z = a\sin^p\varphi \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(ii)}$$

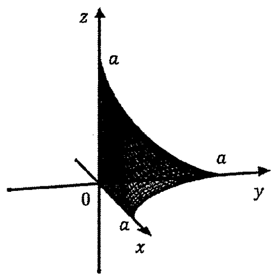

図 2　(2-2)の立体図形

(2-1)　式(ii)について、$\dfrac{dz}{d\varphi}$を計算せよ。

(2-2)　(1-3)の結果を踏まえ、$p=3$の時、$x=0$、$y=0$、$z=0$と式(ii)の曲面により囲まれる立体図形の体積 V(図 2 参照)を、φによる積分に直して、計算せよ。

$$V = \int_0^a S(r) dz$$

[問 3]　（応用数学）

y は x の実数関数とする。以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' = (1-y)y$

(2) $y' - x - y - 2 = 0$

(3) $y' + xy = 3x$

(4) $\frac{1}{6}xy'' - y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{6}x^4 e^x$