[問 1]（応用数学）

3 次実ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを示せ。

(2) 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ に対して，$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の内積を表す。また，ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ のノルム $\|\boldsymbol{v}\|$ を，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ によって定義する。

3 次実ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3\|}\boldsymbol{b}_3$$

によって定義する。ただし，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ は，

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3)}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2$$

によって定義される 3 次実ベクトルである。

このとき，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を求めることにより，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1) = 0$ と $\|\boldsymbol{u}_1\| = \|\boldsymbol{u}_2\| = \|\boldsymbol{u}_3\| = 1$ が成り立つことを示せ。

(3) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を用いて，3×3 実行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix}$$

によって定義する。このとき，$P^T P$ を求めよ。ただし，P^T は P の転置行列である。

[問 2]（応用数学）

実関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ と定義したとき，$f(0) = 1$ を満たす。

(1) θ を任意の実数として，定積分 $u_1(\theta) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(\theta x)\, dx$ を求めよ。

(2) $f(x)$ が極値をとる x を a と表すとき，極値 $f(a)$ を求めよ。
ただし，$f(0) = 1$ が極値の 1 つであることを証明なしに使ってよい。

(3) $t > 0$ とし，関数 $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx$ の導関数 $\dfrac{dF(t)}{dt}$ を $F'(t)$ と表す。

(a) $F'(t)$ を部分積分を用いて求めよ。ただし $\lim_{x\to\infty} e^{-tx}\sin x = \lim_{x\to\infty} e^{-tx}\cos x = 0$ を用いて良い。

(b) (a) の結果を用いて，定積分 $I(t) = \displaystyle\int_0^{t} F'(s) ds = -\arctan t$ を示せ。

(c) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} (F(t) - F(0))$ であることを利用して，$F(0)$ を求めよ。ただし $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ を利用してよい。

[問 3]（応用数学）

変数 y は変数 x の実数関数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ の一般解を求めよ。

(2) 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ の一般解を求めよ。なお，この微分方程式の特殊解が $y = a\cos x + b\sin x$（a，b は定数）と書けることを用いてもよい。

(3) 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = e^{-3x}$ の一般解を求めよ。必要ならば定数変化法を用いてもよい。