$\boxed{1}$ 四角形PQRSを底面とする四角錐（すい）A–PQRSの辺上を動く点Xを考える。Xは頂点Aを出発し，1回目の移動で頂点P，Q，R，Sのいずれか1つに等しい確率で移動する。以後同様に，Xは1回の移動で，そのときにいる頂点から1辺で結ばれた別の頂点のいずれか1つに等しい確率で移動する。また，同じ頂点に留まることはないものとする。正の整数nに対し，Xがn回目の移動後にA，P，Q，R，Sにいる確率をそれぞれa_n，p_n，q_n，r_n，s_nとするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，p_1，a_2を求めよ。

(2) a_{n+1}をp_n，q_n，r_n，s_nを用いて表せ。

(3) a_{n+1}をa_nを用いて表せ。

(4) a_nをnを用いて表せ。

$\boxed{2}$ pを素数とする。次の問いに答えよ。

(1) q_1, q_2, q_3, $\cdots$ の各数が p の倍数でない正の整数であるとき，すべての正の整数 n について，q_1 から q_n までの積 x_n は，p の倍数でない正の整数であることを，数学的帰納法を用いて示せ。ただし，必要であれば，命題「2 つの正の整数 a, b および素数 c について，a と b のどちらも c の倍数でないならば，a と b の積 ab は c の倍数でない」が成り立つことを用いてよい。

(2) p より小さい正の整数 r について，p 個から r 個取る組合せの総数 ${}_p\mathrm{C}_r$ は，p の倍数であることを示せ。ただし，必要であれば，${}_p\mathrm{C}_r$ が正の整数であることは証明なしに用いてよい。

(3) すべての正の整数 n について，$n^p+(p-1)n$ は p の倍数であることを，数学的帰納法を用いて示せ。

$\boxed{3}$　e を自然対数の底とする。関数 $f(x)=(x^3-9x^2+11x-11)e^x$ について，次の問いに答えよ。ただし，必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ は証明なしに用いてよい。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ を示せ。

(3) a を定数とするとき，方程式 $f(x)=a$ の異なる実数解の個数を調べよ。

4 $\log x$ を x の自然対数とし，e を自然対数の底とする。関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x)=\frac{\cos(\log x)}{x} \qquad (1<x<e^{2\pi})$$

$$g(x)=\cos(\log x) \qquad (1<x<e^{2\pi})$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) \geqq g(x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値の範囲において，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。