[問 1]（応用数学）

行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。また，その一つの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ について，$u_2 = 1$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めよ。

(2) 先に求めた A の固有値を λ とし，これに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，$(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ となるベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ を考える。この $\boldsymbol{v}$ について $v_2 = 1$ となる $\boldsymbol{v}$ を求めよ。ただし，E は 2×2 の単位行列である。

(3) 上で求めた λ，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ について，$A\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ となることを示せ。また，$A\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ となることを示せ。ただし，$(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$ とは，縦ベクトル $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ を横に並べて作った 2×2 の行列である。

(4) 数学的帰納法により，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ であることを示せ。ただし，a は 0 でない任意の実数であり，$n = 1, 2, 3, \cdots$ とする。

(5) A^n を求めよ。ただし，$n = 1, 2, 3, \cdots$ とする。

[問 2]　(応用数学)

(1) $x+\sqrt{1+x^2}=t$ を x について解け。

(2) 次の不定積分 $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ を，置換積分を用いて計算せよ。

(3) 次の不定積分 $J=\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$ を，(2) の結果および部分積分を用いて計算せよ。

(4) 曲線 $y=\sin x$ $(0\leq x\leq \pi)$ を x 軸のまわりに回転した図形の表面積を計算せよ。
ただし，次の定理を用いてもよい。

定理：
関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で C^1 級であるとする。曲線 $y=f(x)$ と $x=a$，$x=b$ で囲まれる図形が，x 軸のまわりを 1 回転したときにできる回転体の側面積 S は次の式で与えられる。

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

[問 3]　(応用数学)

y は x の実数関数とする。以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' - 3y = 0$

(2) $(y')^2 + xy' - 3yy' - 3xy = 0$

(3) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3e^x$