

[問 1] (応用数学)

行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A のすべての固有値およびそれらに対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ。
- (2) (1) で求めた値を用いて、対角行列 D に対し、 $A = PDP^{-1}$ を与える行列 P を一つ求めよ。ただし、対角行列とは対角要素以外の要素が 0 となる行列のことであり、 P^{-1} とは P の逆行列である。
- (3) PP^T を求めよ。ただし、 P^T は P の転置行列である。

(4) $\mathbf{0}$ でない任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し、 $P^T \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ であることを示せ。

(5) $\mathbf{0}$ でない任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対し、 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ であることを証明せよ。

[問2] (応用数学)

(1) 関数 $f(x) = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ について次の問いに答えよ。

- (a) 微分によって $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ。
- (b) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ の値を求めよ。
- (c) $f(x)$ を x^3 の項まで、マクローリン展開せよ。

(2) 重積分

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy \right\} dx \quad (1)$$

について次の問いに答えよ。

- (a) 積分領域を図示せよ。
- (b) 式(1)は y, x の順に逐次積分を実施する。積分順序が x, y の順となるよう変更したときの x および y の積分区間を求め、式(2)の A, B, C, D にそれぞれ当てはまる数または式を記せ。

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy \right\} dx = \int_B^A \left\{ \int_D^C e^{\frac{x}{y}} dx \right\} dy \quad (2)$$

- (c) I の値を求めよ。

[問3] (応用数学)

微分方程式について、以下の問いに答えよ。

(1) $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ。

(2) $y'' + y = 5e^x \cos x$ の特殊解は $y = e^x(a \cos x + b \sin x)$ (a, b は定数) と書けることを用いて、その一般解を求めよ。

(3) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ の特殊解を求めよ。必要ならば定数変化法を用いてもよい。