[問 1]（応用数学）

n を正の整数とし，実数を要素とする $n \times n$ 行列を考える。

- E を単位行列とする。
- 行列 X，整数 $k \geq 0$ について X^k を以下で定義する。

$$X^0 = E \qquad X^{k+1} = X^k X \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

- 行列 X の行と列を入れ替えた行列を転置行列と呼び X^T で表す。
- 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ の x_{ij} を X の i 行 j 列成分と呼ぶ。

i 行 j 列成分がそれぞれ a_{ij}, b_{ij} の $n \times n$ 行列 A, B について以下の問いに答えよ。

(1) A と B の積 $AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ の i 行 j 列成分 c_{ij} を a_{ij}, b_{ij} を用いて表せ。

(2) A の転置行列 $A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$ の i 行 j 列成分 a'_{ij} を a_{ij} を用いて表せ。

(3) 単位行列 $E = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$ とその転置行列 $E^T = \begin{pmatrix} e'_{11} & \cdots & e'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e'_{n1} & \cdots & e'_{nn} \end{pmatrix}$ の i 行 j 列成分をそれぞれ e_{ij}，e'_{ij} とするとき，$e_{ij} = e'_{ij}$ を証明せよ。

(4) $(AB)^T = B^T A^T$ を証明せよ。

(5) 整数 $k \geq 0$ について $(A^k)^T = (A^T)^k$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

[問 2]　(応用数学)

連続関数 $f(x)$ は次の関係を満たす。

$$f(x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

(1) $f(0)$ および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) $f''(x) = f(x)$ を示し，$f(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ。

[問３]　(応用数学)

変数 y は変数 x の実数関数とする。次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $2y' + y^2 = 1$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$

(3) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{2x}$