

問 1

次の問いに答えよ。

(1) $\frac{\tan x}{x}$ を微分せよ。

(2) $\left[\frac{(x+3)}{(x+1)^3}\right]^{\frac{1}{5}}$ を微分せよ。

(3) 不定積分 $\int \frac{1-\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx$ を求めよ。但し、 $\sin x(1+\cos x) \neq 0$ とする。

(4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$ を求めよ。

問2

次の問いに答えよ。

(1) 以下に示す行列 \mathbf{Y} を求めよ。

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

(2) 以下の等式が成立することを示せ。但し、 n は自然数である。また、 φ は実数とする。

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

(3) 行列 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} が正則な n 次正方行列であるとき、

$$(\mathbf{CD})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^{-1}$$

が成立することを示せ。

但し、行列 \mathbf{C} の逆行列を \mathbf{C}^{-1} 、行列 \mathbf{D} の逆行列を \mathbf{D}^{-1} 、行列 \mathbf{CD} の逆行列を $(\mathbf{CD})^{-1}$ とする。

問3

関数 $y = f(x)$ の一次の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を y' とする。

以下の微分方程式を解いて一般解を求めよ。

(1) $y' - y + 1 = 0$

(2) $y' + xy - 2x = 0$

(3) $y' + 2y = e^x$ 但し, e は自然対数の底とする。