[問 1]　(応用数学)

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対する線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) 線形写像 f に対応する行列 A を求めよ。

(2) 線形写像 f で直線 $x_2 = mx_1$ が自分自身に写像されるとき，m の値を求めよ。

(3) 線形写像 f による，直線 $2x_1 - x_2 = 5$ の像を求めよ。

(4) 行列 A の固有方程式を立てて，固有値をすべて求めよ。

(5) すべての固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ。ただし $x_1 = 1$ とする。

(6) 行列 A を対角化する行列 P を使って，行列 A を対角化せよ。

[問 2]　(応用数学)

$n=0,1,2,\ldots$ に対して実数関数 $H_n(x)$ を

$$H_0(x)=1,\quad H_n(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

と定義する。

(1) $H_1(x)$, $H_2(x)$ を x の式として求めよ。

(2) $H_n'(x)=xH_n(x)+H_{n+1}(x)$ の関係を示せ。

(3) 数学的帰納法を用いて，$H_n(x)$ が n 次の多項式であることを示せ。

(4) $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^nH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ とすると $I_n=(-1)^n n!I_0$ であることを示せ。
必要ならば任意の多項式 $p(x)$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ となることを用いてもよい。

[問３]　(応用数学)

y を x の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$ の一般解を求めよ。

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=0$ の一般解を求めよ。

(3) (2) の結果を利用して，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=3x+5$ の一般解を求めよ。