[問 1]　(応用数学)

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が次の関係を満たしている。

$$x_0 = 1,\ \ y_0 = 0,$$
$$x_{n+1} = 2x_n + 6y_n,\ \ y_{n+1} = x_n + y_n$$

(1) 数列間の関係を次のように行列表現したときの行列 A を記せ。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A の固有値を全て求めよ。

(3) (2) で得られた固有値に対応する固有ベクトルを全て求めよ。

(4) 行列 P を, $P^{-1}AP$ の演算で行列 A を対角化するものとする。(3) で得られた固有ベクトルから, 行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。

(5) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ を用いて A^n を求めよ。

(6) x_n, y_n を求めよ。

[問2]　(応用数学)

定積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx \ \ (n = 0, 1, 2)$$

について次の問いに答えよ。

(1) I_1 を計算せよ。

(2) ${I_0}^2$ を

$${I_0}^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right)$$

とおき，直交座標 (x, y) の 2 重積分と考える。この 2 重積分に極座標 (r, θ) への座標変換

$$x = r\cos\theta, \ \ y = r\sin\theta$$

を施して得られる r，θ の 2 重積分を記述せよ。

(3) (2) の 2 重積分を計算し，I_0 の値を求めよ．

(4) (3) で得られた I_0 の積分の値を用いて，I_2 を計算せよ。

[問 3]　(応用数学)

y を x の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $(xy+x)y'+xy-y=0$ の特殊解を求めよ。ただし，初期条件を $(x,y)=(1,1)$ とする。

(2) 微分方程式 $y''-3y'+2y=0$ の一般解を求めよ。

(3) (2) の結果を用いて，微分方程式 $y''-3y'+2y=2x-1$ の一般解を求めよ。