平成 30 年度入学者選抜学力検査問題・略解（推薦）

教科：数学

$\boxed{1}$ x，y，z は 0 でない実数とする。$2^x = 3^y = 6^z$ のとき，等式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{解答例}}$

$2^x = 3^y = 6^z$ の各辺について 6 を底とする対数をとり，整理をすると，

$$x = \frac{z}{\log_6 2}, \quad y = \frac{z}{\log_6 3}$$

を得る。このとき，$x \neq 0$，$y \neq 0$，$z \neq 0$ より，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log_6 2}{z} + \frac{\log_6 3}{z} = \frac{\log_6 6}{z} = \frac{1}{z}$$

となる。

よって，$2^x = 3^y = 6^z$ のとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ は成り立つ。

$\boxed{2}$ 平面上に A(2, 3)，B(−2, 2)，C(1, −1) を頂点とする三角形 ABC があるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 辺 BC を 5 : 2 に外分する点 D の座標を求めよ。

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(3) 三角形 ABC の外心の座標を求めよ。

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3, -3)$ より，点 D の座標は $(3, -3)$ ……(**答**) である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-4, -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1, -4)$ のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする。このとき，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{4+4}{\left(\sqrt{17}\right)^2} = \frac{8}{17}$$

である。このとき，$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ に注意して，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$$

となる。よって，

$$\text{三角形 ABC の面積} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta = \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{17}\right)^2\times\frac{15}{17} = \frac{15}{2} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

を得る。

(3) 外心を P とし，その座標 (x, y) とする。このとき，点 P は，三点 A，B，C から等距離にあるので，

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 = \mathrm{CP}^2$$

となる。このとき，

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

である。これらを整理すると，

$$8x + 2y = 5, \qquad x - y = -1, \qquad 2x + 8y = 11$$

であり，これらを解くと，点 P の座標は

$$(x, y) = \left(\frac{3}{10}, \frac{13}{10}\right) \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=x^3-9x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,-8)$ における接線を ℓ とする。このとき，ℓ の方程式を求めよ。

(3) (2) のとき，曲線 $y=f(x)$ および接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答例

(1) $f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ である。これより，$f'(x)=0$ となるのは，$x=\pm\sqrt{3}$ のときである。 増減表（**略**）は以下の通りである。

よって，

$$\begin{aligned}&x=-\sqrt{3}\ \text{で極大値}\quad 6\sqrt{3},\\&x=\sqrt{3}\ \ \ \text{で極小値}\ -6\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。よって，$y=f(x)$ のグラフ（**略**）は次のようになる。

(2) $f'(x)=3x^2-9$ より，$x=1$ のとき，$y'=-6$ である。よって，接線 ℓ の方程式は $y=-6(x-1)-8$，つまり $y=-6x-2$ ……(**答**) である。

(3) 曲線 $y=x^3-9x$ と接線 ℓ の共有点の x 座標は，方程式 $x^3-9x=-6x-2$ の解である。この方程式を整理すると，$(x-1)^2(x+2)=0$ より，$x=-2,\ 1$ である。

よって，$x\geqq -2$ のとき $(x^3-9x)-(-6x-2)=(x-1)^2(x+2)\geqq 0$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\{(x^3-9x)-(-6x-2)\}\,dx&=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}\\&=\frac{27}{4}\ \cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

である。