平成 30 年度入学者選抜学力検査問題・略解（前期日程）
教科：数学

$\boxed{1}$ 　0 でない複素数 z に対し，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とする。このとき，w が実数となるような z 全体が表す複素数平面上の図形を図示せよ。

$\boxed{\text{解答例}}$

x と y を実数，i を虚数単位とし，$z = x + yi$ とおく。ただし，$z \fallingdotseq 0$ より $(x, y) \fallingdotseq (0, 0)$ である。このとき，

$$\begin{aligned} w &= (x + yi) + \frac{1}{x + yi} \\ &= (x + yi) + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\ &= x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}\, i \end{aligned}$$

である。したがって，

$$w\,\text{の虚部} = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}$$

が 0 となるような (x, y) は，$y = 0$ または $x^2 + y^2 = 1$ を満たす。ただし，原点を除く。これらを図示すると，以下の太線の部分**【図は略】**となる。

2 下の表は，10 人の生徒に 10 点満点の 2 種類のテスト A，B を行った結果である。次の値を求めよ。ただし，得られた値が無限小数の場合は，小数第 2 位を四捨五入せよ。

生徒の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
テスト A の得点	2	9	4	7	1	5	8	3	6	5
テスト B の得点	1	5	3	8	2	6	7	4	5	9

(1) テスト A の得点の平均値

(2) テスト B の得点の分散

(3) テスト A とテスト B の得点の共分散

(4) テスト A とテスト B の得点の相関係数

解答例

(1) テスト A の得点の平均値 $= \dfrac{2+9+4+7+1+5+8+3+6+5}{10} = 5$ [点] ……(**答**) である。

(2) テスト B の得点の平均値 $= \dfrac{1+5+3+8+2+6+7+4+5+9}{10} = 5$ より，テスト B の得点の分散を σ_B^2 とすると，

$$\sigma_B^2 = \{(1-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(8-5)^2+(2-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2 +(5-5)^2+(9-5)^2\} \div 10 = 6 \quad \text{……(答)}$$

である。

(3) テスト A とテスト B の得点の共分散を σ_{AB}^2 とすると，

$$\sigma_{AB}^2 = \{(1-5)(2-5)+(5-5)(9-5)+(3-5)(4-5)+(8-5)(7-5)+(2-5)(1-5) +(6-5)(5-5)+(7-5)(8-5)+(4-5)(3-5)+(5-5)(6-5)+(9-5)(5-5)\} \div 10 = 4 \quad \text{……(答)}$$

である。

(4) テスト A の得点の分散を σ_A^2 とすると，

$$\sigma_A^2 = \{(2-5)^2+(9-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2+(1-5)^2+(5-5)^2+(8-5)^2+(3-5)^2 +(6-5)^2+(5-5)^2\} \div 10 = 6$$

である。よって，テスト A とテスト B の得点の相関係数は

$$\frac{\sigma_{AB}^2}{\sqrt{\sigma_A^2}\sqrt{\sigma_B^2}} = \frac{2}{3} = 0.666.... \fallingdotseq 0.7 \quad \text{……(答)}$$

となる。

$\boxed{3}$ $a=308$, $b=255$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a と b が互いに素であることを示せ。

(2) 方程式 $ax+by=0$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

(3) 方程式 $ax+by=1$ を満たす整数の組 (x, y) を 1 つ求めよ。

(4) 方程式 $ax+by=1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答例

(1) ユークリッドの互除法を用いて，a と b の最大公約数を求める。

$$308=255\times1+53,\quad 255=53\times4+43,\quad 53=43\times1+10,$$
$$43=10\times4+3,\quad 10=3\times3+1,\quad 3=1\times3+0$$

より，a と b の最大公約数は 1 である。よって，a と b は互いに素である。

(2) 方程式 $ax+by=0$ を満たす整数の組（整数解）を (x_0, y_0) とすると，$ax_0+by_0=0$ …① である。ここで (1) の結果より，a と b は互いに素なので，n を整数として $x_0=bn$ と表すことができる。これを ① に代入すると，$abn+by_0=0$ である。よって，$b\neq0$ より，$y_0=-an$ である。

逆に，$(x, y)=(bn, -an)$（n は整数）とすると，(x, y) は ① の解である。

以上より，① を満たすすべての整数の組（整数解）は，$(x, y)=(bn, -an)$ (n は整数) ……(**答**) である。

(3) (1) の

$$308=255\times1+53,\quad 255=53\times4+43,\quad 53=43\times1+10,$$
$$43=10\times4+3,\quad 10=3\times3+1,$$

を書き替えると，

$$53=308-255\times1=a-b,\quad 43=255-53\times4=-4a+5b$$
$$10=53-43\times1=5a-6b\quad 3=43-10\times4=-24a+29b$$

となる。したがって，

$$1=10-3\times3=77a-93b\ \cdots②$$

である。

よって，方程式 $ax+by=1$ …③ を満たす整数の組（整数解）の一つは $(x, y)=(77, -93)$ ……(**答**) である。

(4) ② と ③ より，

$$a(x-77)+b(y+93)=0\ \cdots④$$

となる。ここで，$X=x-77$, $Y=y+93$ とおくと，④ は

$$aX+bY=0\ \cdots⑤$$

となり，(2) の結果より，$(X, Y)=(bn, -an)$（n は整数）は ⑤ を満たす整数の組（整数解）となる。
これより，③ を満たすすべての整数の組（整数解）は，$(x, y)=(bn+77, -an-93)$ (n は整数) ……(**答**) である。

$\boxed{4}$ θ を媒介変数として，

$$x = e^{-\theta}\cos\theta, \quad y = e^{-\theta}\sin\theta$$

で表される点 $\mathrm{P}(x, y)$ が描く曲線を C とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}$ をそれぞれ θ の式で表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ における曲線 C の接線の方程式を求めよ。

(3) $a > 0$ とする。曲線 C の $0 \leqq \theta \leqq a$ の部分の長さを $L(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} L(a)$ を求めよ。

解答例

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -e^{-\theta}(\cos\theta + \sin\theta)$， $\dfrac{dy}{d\theta} = e^{-\theta}(\cos\theta - \sin\theta)$ ……(**答**)

(2) (1) より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

となる。よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$，$x = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$，

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$ である。このとき，求める接線の方程式として，

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}\right)$$

つまり

$$y = \left(2-\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)e^{-\frac{\pi}{3}} \quad \text{……(答)}$$

を得る。

(3) (1) より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = e^{-2\theta}\left\{(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2\right\} = 2e^{-2\theta}$$

となる。ここで，$e^{-\theta} > 0$ に注意すると，

$$L(a) = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^a e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\left[-e^{-\theta}\right]_0^a = \sqrt{2}\,(1-e^{-a})$$

である。このとき，$a > 0$ および $e > 1$ より $0 < e^{-a} < 1$ に注意すると，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} e^{-a} = 0$ である。

よって，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} L(a) = \sqrt{2}$ ……(**答**) を得る。