問題 1 解答

(1)

小物体が打ち出されてからの時間をt，小物体の速度を$(v_x,\ v_y,\ v_z)$，位置を$(x,\ y,\ z)$とする。x, y方向は等速運動，z方向は等加速度運動である。

小物体の速度は$(0,\ 2v\cos 30°,\ -2v\sin 30°) = (0,\ \sqrt{3}v,\ -v)$であるため，

$$(v_x,\ v_y,\ v_z) = (0,\ \sqrt{3}v,\ -v-gt)$$

$$(x,\ y,\ z) = (0,\ \sqrt{3}vt,\ h-vt-\tfrac{1}{2}gt^2)$$

となる。地面に達したとき$z=0$であり，その時の時間をTとすると，$h-vT-\frac{1}{2}gT^2=0$より，

$$T = \frac{-v \pm \sqrt{v^2+2gh}}{g}$$

が得られる。

ここで，$T>0$であるため，$T=\frac{\sqrt{v^2+2gh}-v}{g}$となる。$T$を$(v_x, v_y, v_z)$に代入して，求める速度は

$$\left(0,\ \sqrt{3}v,\ -\sqrt{v^2+2gh}\ \right)$$

となる。

(2)

Tを(x, y, z)に代入して，Aの座標は

$$\left(0,\ \frac{\sqrt{3}v}{g}\left(\sqrt{v^2+2gh}-v\right),\ 0\right)$$

となる。

(3)

小物体の速度を$(v'_x,\ v'_y,\ v'_z)$，位置を$(x',\ y',\ z')$とする。

y方向は等速運動，x, z方向は等加速度運動となる。

x方向の加速度をa'_xとすると，運動方程式$ma'_x=F$より，$a'_x=\frac{F}{m}$となる。また，位置は$(x',\ y',\ z') = \left(\frac{F}{2m}t^2,\ \sqrt{3}vt,\ h-vt-\frac{1}{2}gt^2\right)$となる。

$z=z'$であるため，地面に達した時間Tは(1)と同じとなる。よって，B の座標は$\left(\frac{F}{2mg^2}\left(\sqrt{v^2+2gh}-v\right)^2,\ \frac{\sqrt{3}v}{g}\left(\sqrt{v^2+2gh}-v\right),\ 0\right)$となる。(2)とのずれは$x$方向のみであるため，AB 間の距離は

$$\frac{F}{2mg^2}\left(\sqrt{v^2+2gh}-v\right)^2$$

となる。

(4)

風による力はx方向のみに仕事をする。仕事をWとすると，仕事の定義より

$$W = F'x = \frac{F^2}{2mg^2}\left(\sqrt{v^2+2gh}-v\right)^2$$

となる。

2

小球の質量をm，重力加速度の大きさをg，小球を放した位置を点Sとする。
斜面Bにおける小球の最高点をQとし,小球が点Pから点Qまで移動した距離をlとする。
題意より，小球は斜面B上を往復している。このときの摩擦による仕事をWとすると,
$W=\mu' mg\cos\theta\times 2l$ ・・・・・(1)
小球を放した点をSとし，小球が斜面Aに戻ってきた際の最高点の場所をR，戻ってきたときの高さをhとする。また，小球を放したときの力学的エネルギーをE_S，Rに到達したときの力学的エネルギーをE_Rとする。
$E_R=E_S-W$・・・・・(2)
E_SはmgH，E_Rはmghと表すことができるので，(2)式より
$mgh=mgH-\ 2\mu' mgl\cos\theta$
したがって
$h=H-\ 2\mu' l\cos\theta$・・・・・(3)
ここで点Qにおける力学的エネルギー（E_Qとする）を考えると

$$E_Q=E_S-\frac{W}{2}\ \cdots\cdots(4)$$

(1)式，(4)式より
$mgl\sin\theta=mgH-\ \mu' mgl\cos\theta$
したがって

$$l=\ \frac{H}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}\cdots\cdots(5)$$

(3)式，(5)式より

$$h\ =\ H-2\mu'\cos\theta\ \times\frac{H}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}$$

$$=\ H\,(1-\frac{2\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta})$$

$$=\left(\frac{\tan\theta-\mu'}{\tan\theta+\mu'}\right)H \qquad \text{(答)}$$

※ $h\ =\left(\dfrac{\sin\theta-\mu'\cos\theta}{\sin\theta+\mu'\cos\theta}\right)H$ も可

以上

$\boxed{3}$ 解答例

(1)

(a)　ファラデーの電磁誘導　　(b)　自己インダクタンス

(c)　ヘンリー　　(d)　相互誘導

①　$\frac{N_1}{L}I$　　②　$\frac{\mu_0 N_1 \pi a^2}{L}I$　　③　$\frac{\mu_0 N_1 \pi a^2}{L}\Delta I$

④　$\frac{\mu_0 N_1^2 \pi a^2}{L}$　　⑤　$\frac{\mu N_1 \pi a^2}{L}\Delta I_1$　　⑥　$\frac{\mu N_1 N_2 \pi a^2}{L}\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$

⑦　$\frac{N_2}{N_1}$

(2)　(エ)

4 解答例

(1)　理想気体の温度は，ケルビン表示で 27+273=300 K である。

大気圧を P_0，円筒の底面積を S，理想気体のモル数を n，温度を T とすると，理想気体の状態方程式は

$$P_0\,(S\,h) = n\,R\,T$$

である。よって，求める高さ h は，

$$h = \frac{n\,R\,T}{P_0 S} = \frac{0.314 \times 8.31 \times 300}{10^5 \times 3.14 \times (0.05)^2}$$

$$= \frac{0.314}{3.14} \times \frac{8.31 \times 300}{10^{5-4}} \times \frac{1}{25} = 0.1 \times \frac{8.31 \times 300}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{8.31 \times 3 \times 4}{100} = 0.9972$$

以上より，<u>$h = 1.0\times10^2$ cm</u> である。

(2)　設問の状態変化は定圧変化である。－183℃ = 90 K であるので，シャルルの法則より，

求める高さは $h = 90\times1.0 / 300 = 0.30$ m = <u>30 cm</u> である。

(3)　定圧変化のときに気体が外部にした仕事 W は，(1)の状態から(2)の状態への変化に伴う体積の変化を ΔV とすると，$W = P_0\Delta V$ で与えられる。よって，

$$P_0\Delta V = 10^5 \times 3.14 \times (0.05)^2 \times (0.30 - 1.0) = -3.14 \times 5^2 \times 0.7 \times 10^{5-4} = -3.14 \times \frac{100}{4} \times 7$$

$$= -\frac{3.14 \times 7}{4} \times 10^2 = -5.495 \times 10^2$$

以上より，<u>$W = -5.5\times10^2$ J = －0.55 kJ</u> である。

(4)　理想気体の圧力を P，ふたの質量を m，重力加速度を g とすると，力のつりあいの関係

$$P\,S = P_0\,S + m\,g$$

が成り立つ。求める高さ h は，(1)と同様に理想気体の状態方程式から下式で与えられる。

$$h = \frac{n\,R\,T}{P\,S} = \frac{n\,R\,T}{P_0 S + m\,g} = \frac{n\,R\,T}{P_0 S} \times \frac{1}{1 + \frac{m\,g}{P_0 S}}$$

ここで，

$$\frac{m\,g}{P_0 S} = \frac{0.942 \times 9.8}{10^5 \times 3.14 \times (0.05)^2} = \frac{0.942}{3.14} \times \frac{9.8}{10^{5-4}} \times \frac{1}{25} = 0.3 \times 0.98 \times \frac{4}{100} = 0.01176$$

より，0.01176 は 1 より十分小さいので，$\frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x$ を用いると，$1 - 0.01176 \fallingdotseq 0.988$ を得る。

よって，$h = (1.0\times10^2)\times0.988 = 0.988$ m ≒ <u>99 cm</u> である。

[別解]　与えられた近似式を用いずに計算しても，以下のように <u>$h = 99$ cm</u> を得る。

$$h = \frac{n\,R\,T}{P\,S} = \frac{n\,R\,T}{P_0 S + m\,g} = \frac{0.314 \times 8.31 \times 300}{10^5 \times 3.14 \times (0.05)^2 + 0.942 \times 9.8} = 0.9856\cdots \fallingdotseq 99\ \text{cm}$$