[問 1]　(応用数学)

行列 Q を次のように与える。

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 Q の固有値をすべて求めよ。

(2) 行列 Q の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ をすべて求めよ。固有ベクトルは正規化し，x_2 を正の値として表現せよ。

(3) (2) で得られた固有ベクトルから次の行列 P を求めよ。この行列 P は行列 Q を $P^{-1}QP$ で対角行列にし，行列 P の $(1,1)$ 成分は正の値である。
また，求めた行列 P がどのような変換に相当するかを記述せよ。

(4) 2 次曲線 $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5$ が，次の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって移る曲線の方程式を x'，y' を用いて表せ。

[問 2]　(応用数学)

2 重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$$

について，次の問いに答えよ。ただし，I の積分領域 D は不等式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

で表される xy 平面上の領域である。

(1) x, y から極座標 r, θ への変数変換を次のように

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$$

実行し，ヤコビアン (ヤコビ行列式) を求めよ。

(2) 積分範囲を題意から定め，I を計算せよ。

[問３]　(応用数学)

y を x の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $xy' + y = xy$ の特殊解を求めよ。ただし，初期条件を $(x, y) = (1, 1)$ とする。

(2) $y' - 3y = 0$ の一般解を求めよ。

(3) $y' - 3y = x$ の一般解を求めよ。ここで，上の (2) の一般解に着目して，定数変化法を使ってもよい。