

(応用数学) [問1]

1. 次のベクトルについて、以下の問いに答えよ。

$$\vec{a} = (3, 2, -1), \quad \vec{b} = (-4, 1, -1), \quad \vec{c} = (1, 3, 2)$$

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。
- (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ を計算せよ。
- (3) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} が一次独立であるか一次従属であるか調べよ。

2. 行列について、以下の問いに答えよ。

(1) 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} a+c & b & b \\ b & b+c & a \\ b & a & b+c \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) で求めた解のうち、最大の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(応用数学) [問2]

関数 $f(x) = \log(1+x)$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log x$ は自然対数である。

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ をマクローリン展開せよ。

(3) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ をマクローリン展開せよ。ただし、 $-1 < x < 1$ とする。

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x^3}$ を求めよ。

(応用数学) [問3]

1階線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ とおいたとき、与えられた微分方程式の分母および分子の定数項が 0 となるための α および β を求めよ。
- (2) α および β の値によらず $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ であることを示せ。
- (3) 与えられた微分方程式を X および Y に関する微分方程式に変換し、一般解を求めよ。ただし、(1) で求めた α および β の値を用い、 x および y で記せ。必要であれば $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ ($a \neq 0$) を用いてよい。
- (4) 特異解について簡潔に説明し、与えられた微分方程式が特異解を持つかどうかを述べよ。