[問 1] (応用数学)

定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ を，次の順序に従って求めよ。ただし n は非負整数とする。

(1) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$， $I_1 = 1$ を示せ。

(2) $n \geqq 2$ の場合において，$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$，すなわち $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ。ただし，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx$ に着目して部分積分法を使ってもよい。

(3) (1) および (2) の関係を利用して次が成り立つことを示せ。ただし以下の式で k は正整数とする。

(a) n が偶数ならば ($n = 2k$ とおく)

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$$

(b) n が奇数ならば ($n = 2k+1$ とおく)

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}$$

[問 2] (応用数学)

y を x の実数関数とする。次の問いに答えよ。

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$ の一般解を求めよ。

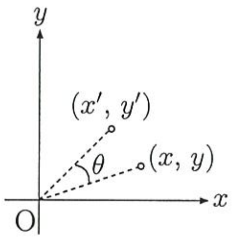
(2) (1) の結果を利用して，$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{3x}$ の一般解を求めよ。

(3) 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = xy\dfrac{dy}{dx}$ の特殊解を求めよ。ただし，初期条件を $(x,\ y) = (e,\ 3)$ とする。

[問 3] (応用数学)

(1) 2 以上の自然数 n および m に対して $A^m = O$ (O は零行列を表す) となる n 次正方行列 A を考える。単位行列を E と表すとき，$(E - A)$ が逆行列を持つことを示し，その逆行列を求めよ。

(2) 図に示すように角 θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の回転で，点 (x, y) を点 (x', y') に移す。



この変換行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。次の問いに答えよ。

(a) 行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ。このとき固有値および固有ベクトルは複素数になることに注意せよ。虚数単位を i とする。

(b) いま，点 (x, y) は次の曲線

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

を満たすように動く。このとき，角 θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の回転によって写像した点 (x', y') が満たす曲線の式を x' と y' で表せ。さらに，$x'y'$ の係数が 0 となる θ の値を求め，そのときの曲線の式を x'^2 と y'^2 で表せ。